Analiza Matematyczna I.2, kolokwium, 9 maja 2012, 16:05 — 18:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Zdefiniować całkowalność funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ w sensie Riemanna i jej całkę Riemanna.
Niech $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{gdy } x \text{ nie jest odwrotnością dodatniej liczby całkowitej,} \\ x\,, & \text{gdy } x \text{ jest odwrotnością dodatniej liczby całkowitej.} \end{cases}$$

Rozstrzygnąć, czy funkcja φ jest całkowalna w sensie Riemanna. Jeśli tak, znaleźć $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

---

1. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\Big(1-\cos\Big(\ln(1+x) - x\sqrt{1+x}\Big)\Big)\,\big(1+x^2\big)^{11}}{x\big(\sin x - \operatorname{arctg} x\big)}$.

---

2. Niech $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Rozwinąć funkcję f w szereg potęgowy wokół punktu 0 (czyli znaleźć jej szereg Maclaurina).
Znaleźć zbiór złożony ze wszystkich tych $x\in\mathbb{R}$, dla których otrzymany szereg jest zbieżny.

---

3. Niech $f_n(x) = n\ln\frac{nx+1}{nx}$ dla $x\in[1,+\infty)$. Znaleźć granicę ciągu (f_n). Wyjaśnić, czy ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do swej granicy na półprostej $[1,+\infty)$.

---

4. Udowodnić, że szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$ jest zbieżny.

Znaleźć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

Wskazówka: Można ewentualnie rozważyć funkcję $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}x^{n+1}$.
